Alkotás, alkotó gondolkodás

- Ha megfigyelsz egy kisgyereket, hogy miképpen próbálkozik kinyitni egy gyufásdobozt, azt veszed észre, hogy miközben kísérletezik, nyitja és csukja a száját: lemásolja a mozgásával azt, amit elérni szeretne.
- Idegen helyen magad is segítesz a tájékozódásban magadnak: testmozdulataiddal, kezed, karod önkéntelen mozgásával előállítod a megfelelő irányokat.
- Beszélni tanuló gyermekemet, unokámat figyelve azt tapasztalom, hogy egy-egy új szót már a következő mondatába belepróbál, s figyeli a hatást: sikerült-e megértenie.

Mi szokott lenni a gyerekek feladata az iskolában? **Utasítást kapnak, és azt kell végrehajtaniuk.** Pl.: Add össze! Számold ki! Színezd ki! Hajtsd össze! Húzz nyilat a kisebbtől a nagyobb felé! Válogasd ki a párosakat!

– Igen, szükség van ilyen fajta tevékenységekre is! Pedig kis korban (még 6-10 éves korban is) jellemzően **megalkot, felépít, létrehoz** a kisgyerek, s úgy ismeri, tanulja meg az újabb helyzeteket, fogalmakat, problémákat.

Amikor **problémát fogalmazunk meg**, akkor azonban egészen másfajta tevékenységet kívánunk tanítványainktól. Ha rájuk bízzuk a probléma megoldását, akkor **alkotást várunk tőlük,** ami egészen a sajátjuk lesz, amelyben követhetik a saját gondolkodásukat, használhatják azokat az ismereteket, készségeket, eszközöket, amelyekkel rendelkeznek. Nem az a dolguk, hogy: végezzenek el egy rájuk bízott feladatot, hajtsanak végre egy adott utasítást, hanem **a cél van adva.** Ha vonzóvá tudjuk tenni számukra a célt, akkor maguk indulnak az útkeresésre.

I. Számok alkotása különféle feltételekkel

Fogalmazzunk meg most ilyen típusú feladatokat:

1. *Adok valamilyen számokat, valamilyen műveleteket – alkoss belőlük sokféle új számot!*

   Ilyenkor mindenki a saját képességei, gyorsasága szerint alkot. Sokkal több számítást végez, mintha kijelölt számfeladatokat adnánk, és esetleg új érdekességekre is rábukkanhatnak.

2. *Adok valamilyen számokat, (vagy számjegyeket), és kijelölök egy számot: ezt kellene valahogyan felépíteni vagy minél jobban megközelíteni!*
3. *Adok valamilyen számjegyeket, ezekből válogatva kell adott tulajdonságú számokat alkotni.*
4. *Adok valamilyen számjegyeket, ezekből – valamilyen feltétellel – kell az összes lehetséges számot előállítani*

Ilyen típusú tevékenységekben mindenki a saját eszköztárával dolgozhat, Sok számtani és gondolati műveletet végez, akár „rosszakat” is; de ezek mérlegelése, megítélése, összevetése az elérni kívánt céllal teljesebb, „emberibb” teljesítmény, több haszonnal jár még a készségfejlesztés terén is, mint egy egyszeri utasítás végrehajtása. Ugyanazokat a számításokat, mint amiket kijelölt feladatokon szokott elvégezni, nagyobb számban és sokszoros intenzitással járja be, ezért inkább építi gondolkodását.

Nézzünk egy-két példát mindegyik fajta feladatra!

1. ***Adok valamilyen számokat, valamilyen műveleteket – alkoss belőlük sokféle új számot!***

1.1 Két számot és egy műveletet adok nektek. Legyen a tietek a 3 és a 7, hozzájuk a + jelet szabad felhasználni. Mindkét számot akárhányszor felírhatjátok. Alkossatok velük számokat! (Miféléket lehet felépíteni, miféle számokat nem lehet?)

(*Jegyezzük meg, hogy a 3 és a 7 ebben a feladatban* ***szám*** *–, nem számjegy –, tehát egymás mellé nem írhatók így: 37, 773...*)

Egy ilyen feladat feldolgozásának menete lehet a következő:

- Számok alkotása; az alkotások felírása.

  Pl.: 10 = 7 + 3
  13 = 7 + 3 + 3
  12 = 3 + 3 + 3 + 3
  26 = 7 + 7 + 3 + 3 + 3 + 3
  28 = 7 + 7 + 7 + 7 = 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 7
  ...

- Gyűjtsük azokat a számokat, amelyeket nem tudtunk felépíteni!

  Ilyen szám a 4, az 1 és a 2, 5 de lehetnek gyerekek, akik pl. a 17-et vagy a 22-t... nem tudták megalkotni

- Sejtések megfogalmazása: annak kimondása, hogy amiket nem tudtunk felépíteni, azokat nem is lehet; annak megsejtése, hogy egy határon túl már minden (természetes) szám felépíthető.

  Egy-egy osztályban valószínűleg kiegészítik egymás megoldásait a gyerekek, és kiderül, hogy az 1, 2, 4, 5, 8 és 11 valóban senkinek sem sikerül.

  Sokan szokták igen határozottan kijelenteni azt is, hogy 12-től kezdve már **biztosan** felépíthető minden szám. A kétkedők ilyenkor ellenpéldákat keresnek, és az ilyen számok közös felépítése erősíteni szokta a sejtést. Kisiskolás korban még nem nagyon formálódik az igazolás igénye, de azért jó, ha megerősítjük: sejtés ez, ha nem is találtunk ellenpéldát, nem tudhatjuk, hogy valamilyen nagyobb számok körében nem lesz-e előállíthatatlan szám.

- Megkíséreljük igazolni a sejtésünket egy korábbi ismeretünk felhasználásával. (Az igazolás általában nem kisiskolás kori lehetősége a gyerekeknek, hiszen végtelen sok számra kellene ellenőrizni, illetve általánosítással kellene logikai következtetéseket végrehajtaniuk.)

  A sejtés egy bizonyítása azon alapszik, hogy az összes természetes szám besorolható három hármasával növekvő számsorozatba.

0, 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30, 33, 36, 39, 42, 45. 48 ...

1, 4, 7, 10, 13, 16, 19, 22, 25, 28, 31, 34, 37, 40, 43, 46, ...

2, 5, 8, 11, 14, 17, 20, 23, 26, 29, 32, 35, 38, 41, 44, 47, ...

Ha egy ilyen sorozatban találunk egy, a mondott feltétellel felépülő számot, akkor a nála nagyobb számok csupa 3-as hozzáadásával mind felépülnek. Itt az első sorozatban ilyen a 3; ezek a számok tehát mind felépülnek csupa 3-assal. A második sorozatban az első jó szám a 7. Az itt sorakozó többi szám tehát mind felépül egy 7-esből és valahány 3-asból. (E mellett más felépülésük is lehet!) A harmadik sorozatban először a 14 teljesíti a feltételt; innen kezdve mindegyik szám előáll két 7-esből és valahány 3-asból.

(Megjegyezzük, hogy a 0 is teljesíti a feltételt, mert azt, hogy „csak a 3, 5 és + jel felhasználásával" úgy szoktuk érteni, hogy mást nem használhatunk, de esetleg ezek közül sem használunk egyet sem.)

Hasonló gondolatmenettel annak alapján is bizonyíthatjuk a sejtés igazságát, hogy 7 hetesével növekvő sorozatba soroljuk be az összes természetes számot. (Érdemes végiggondolni ezt a bizonyítást is.)

Ebben a tevékenységben nem a művelet volt kijelölve, aminek eredménye lett egy szám, hanem adott vagy választott számokat írtunk fel valamilyen alakban, valamilyen „néven".

„Minden számnak sok neve van"! – ez azt jelenti, hogy egy ilyen felírásban pl.:

$$28 = 7 + 7 + 7 + 7 = 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 7$$

az = jel nem egy műveleti utasításhoz kapcsolja annak végeredményét, hanem **számokat kapcsol össze egymással**. Ilyen értelemben tehát a fenti felírásban jól látszik az „=" kapcsolat szimmetriája, azaz nem különbözik az 5+5+5+3 = 18 és a 18 = 5+5+5+3 felírás. Mindkettő azt fejezi ki, hogy ez és az a szám ugyanaz, csak más alakban, más néven. Az is kifejeződik a feladatban, hogy a számok sokféle alakja egyenrangú.

Ha a tanítványaink minden számnak sok nevét megismerik, ennek következménye lehet, hogy számolásaikban „beugranak" a legmegfelelőbb alakok. Pl. a 7-hez a 8-at úgy adják hozzá, hogy a 8-nak a 3+5 alakját használják: előbb hozzáadják a 3-at, aztán az 5-öt, vagy úgy adják hozzá, hogy a 10–2 alakot használják: előbb 10-et adnak a 7-hez, aztán visszavesznek 2-t. Esetleg jól ismerik a 7+7=14 összeget, és a 7+8-at 7+7+1 formában számolják ki.

Később is hasznát veszik ennek a gondolkodásnak. Pl. amikor algebrával foglalkoznak, kevésbé lesz probléma annak értelmezésével, hogy egy összeg alakú számmal kell osztást végezniük, hiszen nem egy utasítással kell további műveletet végezniük, hanem számmal. S pl. nem jut eszükbe külön-külön végezni el az osztást a két taggal: $24 / (2+4) \neq 24/2 + 24/4$!

***Más feltételek lehetnek**,*

- *pl. 1, 2, 4, 8, 16, + számokat és műveletet,*
- *vagy az 1, 3, 9, 27, 81számokat és a +, – műveleteket adjuk az alkotás „alapanyagául" stb.)*

1.2 Alkossunk számokat valaki születési évszámából!

Pl. valamelyik közös ismerősünk 1992-ben született. Bármilyen (az adott korosztályban már ismert) műveletet szabad használni, a számjegyeket szabad egymás mellé is tenni, de egy felírásban legfeljebb egy 1-es és 2-es és legfeljebb két 9-es szerepelhet. Alkossunk számokat az évszám számjegyeivel!

A feladat feldolgozásának menete lehet a következő:

- Haladjunk sorban a számokon. Pl. elő tudod-e állítani a 0-t? (0=9–9, vagy 0 = 1–(9/9)) Az 1-et? ... Mindegyiket szabad sokféleképpen!
- Gyűjtsük a számok felírásait! Szabad ellátni a felírásokat a monogramoddal (ez motiválni szokta a gyerekeket).

Itt persze sok szám kimarad, s egy határon túl már egyre több olyan szám lesz, amely nem állítható elő. De minden próbálkozás mozgósítja a gyerekek ismereteit, akkor is számolnak, ha közben el-eltévesztik valamelyik felírást. Az önellenőrzés és egymás felírásának ellenőrzése közben azonban fejlődik megítélő képességük nemcsak abban, hogy melyik állítás igaz, de abban is, hogy melyik érdekes, melyik különösen szép stb.

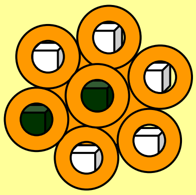
2. ***Adok valamilyen számokat, (vagy számjegyeket), és kijelölök egy számot: ezt kell valahogyan felépíteni vagy minél jobban megközelíteni!***

2.1 Írd fel

- a 12-t 6 db 1-essel
- a 7-et 5 db 2-essel
- a 100-at 5 db 5-össel
- a 100-at 5 db 3-assal
- az 50-et csupa egyenlő számjegyekkel

2.2 **Magi mixer** dobókockával

(Wil Oonk, holland matematika-professzor játéka; eredetileg egy virágmintában összefogott, együtt megpörgethető 5+2 dobókockából álló játékeszköz.)



Adva van 5 dobókocka, rajtuk a szokásos számokkal: 1-től 6-ig. Adva van még két más színű kocka is, az egyik szintén 1-től 6-ig számozva, a másikon azonban ezek a számok állnak: 10, 20, 30, 40, 50 és 60. Előbb ezzel a két kockával dobunk, s felírjuk a két szám összegét. Utána dobunk a másik öt kockával. A kidobott öt szám felhasználásával kell minél jobban megközelíteni a felírt kétjegyű számot.

Vegyük észre, hogy ez a játék kétféle dologban különbözik az előbbiektől. Az egyik eltérés az, hogy **adott számot kell előállítani**, illetve jól **megközelíteni**. A másik az, hogy most **mind az 5 számot fel kell használni**!

Játsszuk el néhány menetben! Érdemes meggondolni, hogy mi pozitívumot jelenthet a gyerek számára egy ilyen fogalmazású játék!

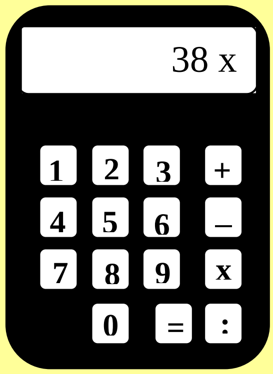
– Pl. mitől jó hangulatú ez a tevékenység?
– Milyen képességeket mozgósít és fejleszt?
– Milyen készségeket fejleszt?
– Miért fontos eszköz a becslőképesség a számok alkotásához?
– Hogyan értékelhetik a gyerekek teljesítményeiket, alkotásaikat?
– Az eltérések vizsgálata miért fontos a további alkotásokhoz?)

A játék során „**tudattalan tanulással**” gyűlik a tapasztalat a műveletek hatásáról. Melyik művelettel növelhető jobban egy-egy szám, melyikkel kevésbé? Mi módon tarthatunk változatlanul egy számot? (A különféle alakban létrehozható 0 hozzáadása, elvétele, a különféle alakban megalkotható 1-gyel való szorzás, osztás.)

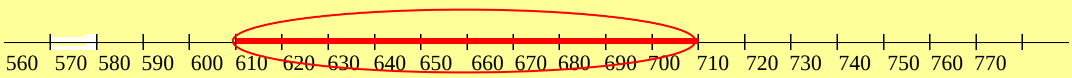
Nagy hangsúlyt kap ebben az alkotásban **a műveletek sorrendjének figyelembe vétele, leírva: a zárójelezés.**

2.3 Céllövő játék zsebszámológéppel

Kijelölünk egy induló számot, pl. a 38-at, ezt beütjük a zsebszámológépbe a szorzás jelével együtt. A jelölt számról kell majd lőni.



Kijelölünk a számegyenesen egy „céltáblát”, pl. legyen ennek a két határa a 600 és a 700.



Így kell „lőni”: A beütött számot meg kell szorozni egy számmal. Akkor talált a lövés, ha a szorzat a 600 és a 700 közé esik.

A gép használati díja: minden próba 1 zsetonba kerül. Ha talált a lövés, 5 zsetont kapsz érte.

Gondoljuk meg a következőket!

- Számol-e itt a gyerek? Vagy csak a számológép?
- Mi a szerepe annak, hogy fizetni kell a gép használatáért?
- Hogy folytassuk a játékot, ha ki-ki megkapta a zsetonjait? (Elemezzük-e, értékeljük-e valahogyan a teljesítményeket? Fogalmazzunk-e új céllövő feltételeket, milyeneket? ...)

  Azt javasoljuk, hogy ne siessünk a tapasztalatok kimondatásával. Jobb, ha többször elővesszük a játékot: más-más indulószámmal, más-más céltáblával. Amikor már a gyerekek többsége jól játssza, majdnem hogy unják, akkor célszerű megfogalmaztatni a gyerekekkel megfigyeléseiket, meggondolásaikat. Ilyenkor is hasznos inkább a nehezebben gondolkodó tanulóknak adni elsőbbséget a kimondásban, s aztán az ő állításaikat formálgatni közösen tovább.

Érdemes a megbeszéléshez meggondolni való kérdéseket alkotni. Például:

- Tudnánk-e ugyanahhoz az induló számhoz más 100-as hosszúságú céltáblát kijelölni, hogy csak 2 számmal találhassunk bele? Hogy 4 is beletaláljon? Hogy 1 vagy még annyi se?...
- Milyen induló számot kellene választani, hogy biztosan legfeljebb egy szorzóval jussunk a 100-as hosszúságú céltábla belsejébe?
- Milyennel induljunk, hogy öt szorzóval bele lehessen találni egy ilyen táblába, de hattal sohase?
- Ha 38 az indulószám, akkor mekkorára válasszuk a céltáblát, hogy 4-5 találatunk legyen, de 6 már ne?
- Hogy választanád meg a céltáblát adott induló számhoz, hogy lehessen 3 találat, de 4 már ne?

A kérdések nyomán kialakuló beszélgetés, vita eldöntésére (sokszor még felső tagozaton is) érdemes a különféleképpen vélekedő gyerekeknek felajánlani a játék vezetését, kipróbálását, s csak ez után kérni a magyarázat megfogalmazását.

3. ***Adok, vagy véletlenszerűen előállítok valamilyen számjegyeket, ezekből, vagy ezekből válogatva kell adott tulajdonságú számokat alkotni.***

3.1 Adok tíz számjegyet:

0, 1, 2, 3, 5, 5, 7, 8, 8, 9

Ezek felhasználásával kell alkotni.

a) Alkosd meg ezekkel a lehető legkisebb és a lehető legnagyobb háromjegyű (négyjegyű) számot!

Legkisebb: 102, legnagyobb: 988
A három egymás mellé írt számjegy közül nem lehet első a 0, mert akkor nem lenne háromjegyű a szám.

b) Alkoss két háromjegyű számot, amelyek összege a lehető legnagyobb!

Nem a 988 + 755, hanem a 985 + 875 a lehető legnagyobb összeg. Ez persze másképpen is előállítható: 975 + 885.

c) Alkoss két háromjegyű számot, amelyek összege a lehető legkisebb!

105 + 235 = 135 + 205

d) Alkoss két háromjegyű számot, amelyek különbsége a lehető legkisebb!

Érdekes, hogy sokszor a legkisebb számok között keresik ilyenkor a gyerekek a megfelelőket. Pedig olyan számokat kellene alkotniuk, amelyek majdnem egyenlők. Ilyen különbségek képezhetők legkisebbekként:

853 – 852 = 852 – 851 = 851 – 850 = 583 – 582 = 582 – 581 = 581 – 580

e) Alkoss két háromjegyű számot, amelyek különbsége a lehető legnagyobb!

Itt egyetlen megoldás van:

988 – 102

f) Alkoss három háromjegyű számot, amelyek közül kettő összege kb. egyenlő a harmadik számmal!

Igen sok lehetőség van a közelítő egyenlőség megvalósítására. (Ez természetesen függ attól, hogy a „kb. egyenlő” kifejezés esetén milyen távolságokat akarunk megengedni.)

Pl.: $285 + 310 \approx 598$ csak 3 az eltérés; itt is: $372 + 515 \approx 889$;

Itt: $580 + 371 \approx 952$ és itt: $392 + 185 \approx 578$ eggyel tér el a két szám egymástól;

Itt már pontos egyenlőség áll fenn: $515 + 387 = 902$

De nyugodtan elfogadhatunk 10 - 20 eltérést is, pl.: $159 + 208 \approx 378$; aztán lehet keresni még jobbakat!

g) Alkoss három háromjegyű számot, amelyek közül a középső kb. egyenlő távol van a másik kettőtől!

Ennek a feltételnek is többféle számhármas megfelel. Például ilyenek:

213 < 557 < 898
344 341

109 < 525 < 938
416 413

508 < 718 < 935
210 207

502 < 718 < 935
216 217

792 < 805 < 819
13 14

720 < 851 < 983
131 132

3.2 Mindenki kijelöli egymás alatt két háromjegyű szám helyét:

Dobókockával hatszor dobunk egymás után. A kidobott számot a kijelölt két szám valamelyik számjegye helyére be kell írni a következő dobás előtt. Hogy hova írjuk, azt a játékban megjelölt cél szerint döntheti el mindenki. A játék a szerint változik, hogy milyen céllal játsszuk:

A játékban a véletlennek is szerepe van, de mégis van mit meggondolni. A hatféle szám egyenlő valószínűséggel keletkezik mind a hat dobásnál.

a) Győz, akinek a két háromjegyű szám összege a legnagyobbra sikerült az osztályban.

b) Győz, akinek a két háromjegyű szám különbsége a legnagyobbra sikerült az osztályban. A különbséget úgy számítjuk most, hogy a nagyobb háromjegyű számból vesszük el a kisebbet, (nem feltétlenül a felsőből az alsót).

c) Győz, akinek a két háromjegyű szám összege a legkisebbre sikerült az osztályban.

d) Győz, akinek a két háromjegyű szám különbsége a legkisebbre sikerült az osztályban.

e) Mindenki győz, akinek a két háromjegyű szám összege (különbsége) az előre kijelölt két határszám közé esik:

f)

350<   <420

(Alkalmanként megválasztva a határszámokat.)

g) Más-más megkötéseket jelenthet az alkotott szám különféle tulajdonságának a megválasztásai:

- nyer, akinél az összeg (különbség) páros;
- 5-tel osztható;
- csupa páratlan számjegyből áll;
- számjegyeinek összege 10, vagy annál kisebb;
- számjegyei balról jobbra növekvő sorrendben állnak...

h) Hasonló célokkal alkossanak a gyerekek szorzatokat! Például öt helyet jelöljenek ki egymás mellett, egy sorban, s ebben először a szorzás jelét helyezik el a harmadik vagy negyedik helyre így:

		·		

			·	

Ennek megfelelően kétjegyű számok szorzatát kell számolniuk vagy egy háromjegyű szám szorzatát egy egyjegyűvel. (Vajon mikor kapnak nagyobb szorzatot? Mikor kisebbet?)

Ugyanennek a játék-sornak másik változata, ha nem egy, hanem két kockával dobunk, s a dobott számok összegét, illetve annak utolsó számjegyét kell beírni a jelölt helyek valamelyikére. (Ha pl. az egyik kockán az 5 áll, a másikon a 6, akkor ezzel az 1-et képeztük, a 11 utolsó számjegyét.)

A változat attól válik érdekesebbé az előzőnél, hogy egyrészt 0-tól 9-ig mindegyik számjegy előfordulhat, másrészt ezek az előfordulások nem egyenlően valószínűek. Könnyebben adódik a 6, 7, vagy a 8, mint a 3, 2, 1, 0, vagy a 9.

A 0 szerepét ismét megerősítheti a játék. Adott szituációban meg kell állapodni abban, hogy pl. szabad a szám elejére helyezni a 0-t, azaz nem kötelező 3-jegyű számokat képezni, hanem lehet 2- vagy 1-jegyű is a szám.

4. ***Adok valamilyen számjegyeket, ezekből – valamilyen feltétellel – kell az összes lehetséges számot előállítani***

Páronként dolgozzatok együtt! A megalkotott számokat külön-külön kártyákra kell írni!

4.1 Írjátok le az összes olyan háromjegyű számot, amelyben a 2-n és az 5-ön kívül nem szerepel más számjegy.

4.2 Írjátok le az összes olyan háromjegyű számot, amelyben csak 3 többszöröse szerepel!

300	303	306	309
330	333	336	339
360	363	366	369
390	393	396	399

600	603	606	609
630	633	636	639
660	663	666	669
690	693	696	699

900	903	906	909
930	933	936	939
960	963	966	969
990	993	996	999

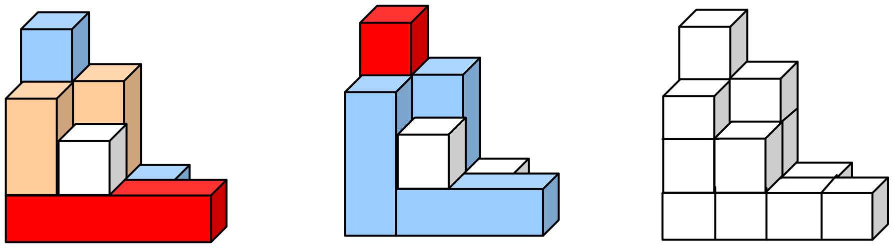
II. Geometriai alkotások

Ezen a téren a legtermészetesebb gondolat, hogy eleinte egészen öntevékenyen, **saját fantázia szerint alkossanak** a gyerekek. Bármilyen eszköz kerül a kezükbe, igen hasznos, ha először szabadon tevékenykedhetnek vele mindaddig, amíg szívesen teszik. Miközben kiélik alkotókedvüket, igen sok tapasztalatot szereznek az építőelemek különféle formai és méretes tulajdonságairól, egymáshoz illeszthetőségéről. Ha nem is tudatosodnak ezek a jellemzők, másolásaikban, feltételek szerinti alkotásaikban hasznosulnak, s azokban válnak egyre tudatosabb ismeretekké.

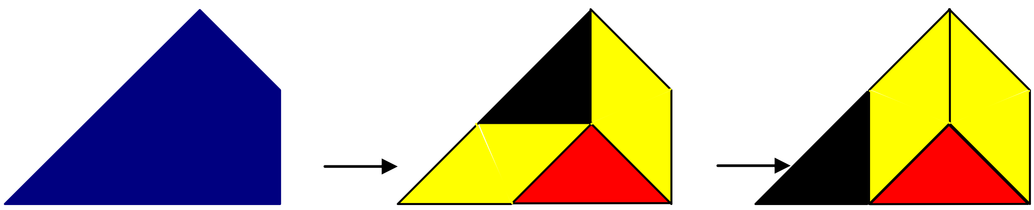
A **szabad alkotásokat** követhetik a **másolások**.

Másolhatnak eleinte a mintáéval azonos elemekből, azonos méretben: térben és síkban egyaránt. Ez esetben a színek, méretek azonosítása segíti a pontos másolást. Jól használható eszköz lehet a játékboltokban kapható faépítő-készlet, különféle mozaikkészlet, de az iskolákban jelen levő színesrúd-készlet és a kartonból készült mozaiklapok is sok jó lehetőséget kínálnak erre.

Nehezebb a másolás, ha más elemekkel próbálnak a mintával azonos alakú és azonos méretű építményt, képet készíteni. Azonban ha a mintával azonos elemekből elkészült az alkotás, akkor sokszor könnyebb ugyanilyent létrehozni más elemekkel. Például a színes rudakkal megépített házat más színű rudakkal is felépíthetik méretazonosan:

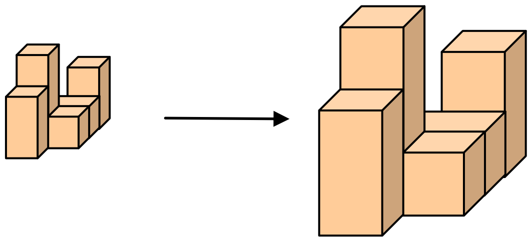


Vagy a mozaikkal lefedett lapon másképpen is elhelyezhetik a másolóelemeket:



A más elemekből, vagy más elrendezésben másolt test, síkidom alakjára irányul jobban a figyelem, hiszen az elemek színe, illesztése már nem jelent segítséget.

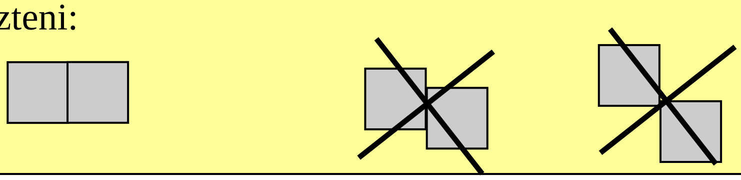
Még jobban kiemelődhet a forma, ha az eredetivel azonos alakú, de más méretű – nagyított vagy kicsinyített – elemekkel próbálnak ugyanolyan alakú építményt létrehozni a gyerekek. Például igen alkalmas eszköz a színes rudak mellett a kettes Dienes-készlet. Ha a rózsaszín rudakkal épített házat „nagyban” is meg akarják alkotni, akkor a Dienes-készlet nagy rúdjaival másolhatnak:



A geometriai alkotások következő fokozata lehet a **megnevezett feltétel szerinti alkotás**. Ebben a tevékenységben válhat egyre tudatosabbá a különféle tulajdonságok ismerete.

Nézzünk példát a feltétel (feltételek) szerinti alkotásra, amely a különféle szinteken igen sokféleképpen továbbfejleszthető.

1. **4 négyzetlapból** rakj ki alakzatokat! A lapokat csak teljes oldalukkal szabad összeilleszteni:

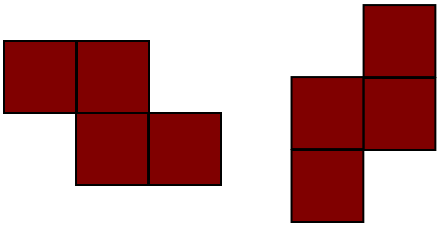


A gyerekeknek biztosítanunk kell sok kis négyzetlapot, hogy ezekkel hozhassák létre alkotásaikat. Fontos az is, hogy maguk előtt tarthassák az elkészített elrendezéseket, amelyek összehasonlítása alapján megítélhetik az azonosságokat, különbözőségeket. (Itt is dolgozhatnak csoportokban; nem kevesebb figyelmet, gondolkodást igényel a csoport többi tagja munkájának szem előtt tartása, átgondolása, mint az egyéni munka.)

Az első próbálkozások után felvetődhet, hogy van-e más lehetőség, mint amilyent eddig találtak.

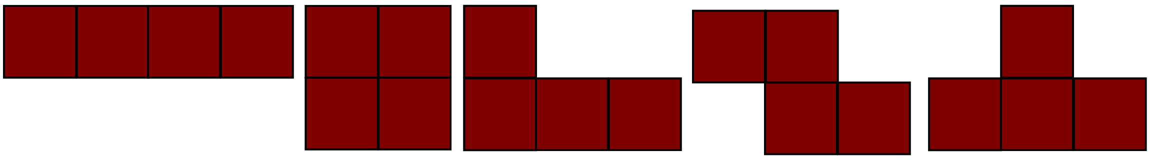
Amikor kezdenek „rendszeresen” próbálkozni –, nagyjából harmadik osztályban –, valószínűleg meg tudják keresni az összes lehetőséget, s meg is mutatják, hogy nincs többféle elhelyezés. Előfordulhat azonban még, hogy valamelyik elrendezés kétféle helyzetben is elkészül, ilyenkor tisztázható: most mit tekintünk ugyanolyan elrendezésnek, miket különböztessünk meg.

Például ezt a két kirakást – adott ebédlőben elhelyezve – esetleg megkülön-böztetik a gyerekek:



És adott szituációban valóban nem mindegy, hogy melyik két asztal van az ablak felőli oldalon. Elérkezhet azonban az idő, amikor elvonatkoztathatunk a kirakott alakzat helyzetétől, s ha pontosan egymásra illeszthetünk két formát, akkor azokat nem különböztetjük meg egymástól. (Ebben azonban meg kell állapodni a gyerekekkel!) Az összehasonlításhoz, ellenőrzéshez célszerű a kirakott alakzatokat összeragasztani (pl. kis cellux-darabokkal fogva össze a két-két szomszédos lapot).

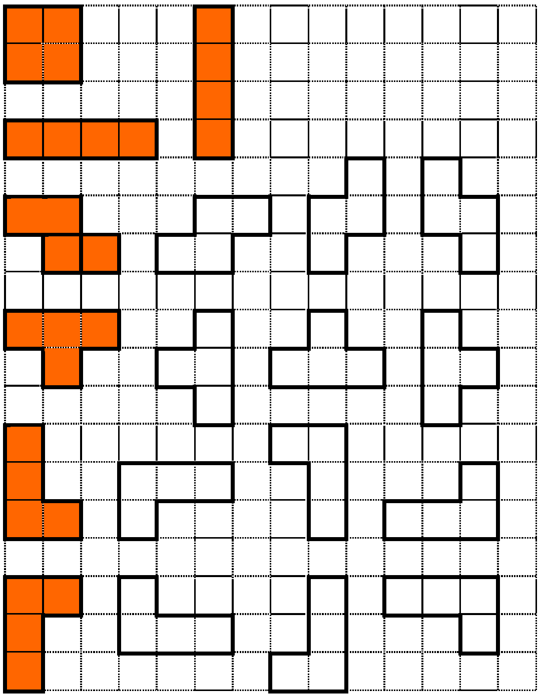
Ilyen megállapodás alapján már csak 5 különböző elrendezést találhatunk:



Következhet az alakzatok vizsgálata: oldalak száma, csúcsok száma, kerület, terület, szögek nagysága stb. – az osztály érdeklődését, fejlettségét, aktuális ismeretkörét figyelembe véve.

Folytatható a feladat azzal, hogy az elkészített alakzatokat a füzetük négyzethálójára rajzolják négyzethálóra annyiféle helyzetben, ahogy csak lehet! Vizsgálhatják, hogy van-e különbség az alakzatok között az elhelyezésük száma szerint?

A négyzetet csak egyféle helyzetben tudják lerajzolni. A másik téglalap már kétféleképpen helyezhető el a háló vonalain. A többi alakzat közül kettőnek négyféle helyzete van a négyzethálón, és egynek nyolcféle állása:



A különös eltérés okának nyomozása során felismerhetik a gyerekek, hogy ha egy-egy alakzatot ráhelyeznek a hálóra, azt mindig elforgathatják 1, 2, 3 derékszöggel, aztán átfordíthatják a túloldalára, s így is 4-féle helyzetben illeszthetik a háló vonalaira.

Azonban a négyzet mindegyik helyzetében ugyanúgy áll: akárhány derékszögű elforgatást végzünk vele, és a túloldalára fordítva is ugyanígy fog állni, azaz ezek a helyzetek nem különböztethetők meg egymástól. A hosszúkás téglalap 1-derékszögnyi elforgatása után láthatóan más helyzetű, de 2-derékszögnyi elforgatás után az eredetivel azonos helyzetűnek látszik. Átfordítva szintén nem tudjuk megkülönböztetni az eredeti helyzetétől. 4-4 helyzetben ugyanolyannak látjuk az elhelyezését.

A következő forma átfordítva más helyzetű, de 2-derékszöggel elforgatva az eredetitől megkülönböztethetetlen állásba kerül. Ennek 2-2 helyzete látszik azonosnak.

A T-re hasonlító alakzat átfordítva nem vesz fel új állást, de elforgatva mindig új helyzetet látunk.

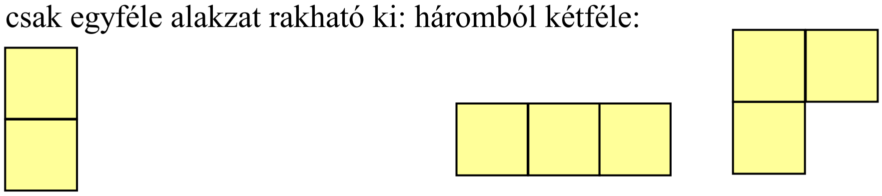
Egyedül az L alak az, amely mind a 8 helyzetében megkülönböztethető állású.

A szimmetriák vizsgálatához vezetett el az alkotásnak ez a lépése. Forgatási szimmetriája van azoknak a formáknak, amelyek valamilyen (a teljesnél kisebb) elforgatás után az eredetitől megkülönböztethetetlen helyzetbe kerülnek. Tengelyes tükrössége (tengelyes szimmetriája) van azoknak az alakzatoknak, amelyek átfordítva pontosan ráilleszthetők az eredetire.

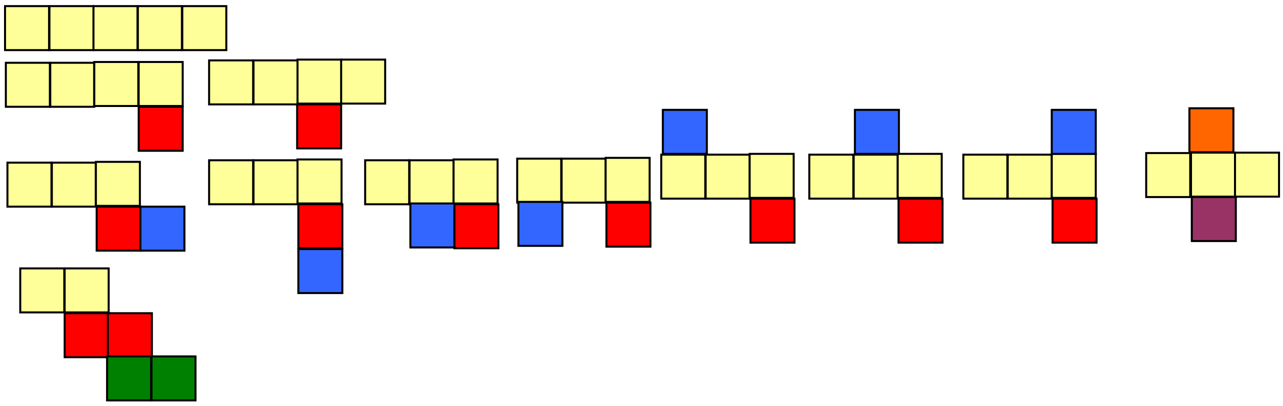
A feladat igen sokféle gondolatot indíthat a gyerekekben, megmozgathatja fantáziájukat, fejleszti kreativitásukat.

- Miért pont 4 lapot használtunk? Lehetne 3-at, 2-t, 5-öt...?

  Két négyzetlapból – a megadott illesztési feltétel szerint – csak egyféle alakzat rakható ki: háromból kétféle:



Öt négyzetlapból már 12 forma áll elő. Rendszert követő alkotásokkal biztosíthatjuk, hogy minden lehetséges alakzatot elkészítsünk:



Hat négyzetlapból már 35 különböző alakzat rakható ki.

Fontos hozadéka ezeknek az alkotásoknak, hogy e közben megtanulják azonosítani, megkülönböztetni egymástól a formákat, ehhez egyre tudatosabb szintre emelkednek különféle geometriai tulajdonságok, viszonyok.

Másrészt tanulnak rendszert formálni az alkotásaik áttekintéséhez. Például az 5 négyzetből alkotható formáknál előbb egy sorba 5 négyzetlapot tettünk. Utána azokat a lehetőségeket vettük számba, amelyekben van egy sorban 4 lap (de több nincs). Az utolsó lapot aztán elhelyeztük az összes helyre, amely új formát eredményezett. A 3 lap egymás mellé illesztése után is először az utolsó lap alá tettük a negyediket, és az ötödikkel „végigsétáltunk" az összes szakasz mellett, ügyelve arra, hogy már 4 lap ne kerüljön egy sorba. Az utolsó formánál csak 2 lap került egy vonalba.

Persze előfordulhat, hogy így egy-egy formát többféleképpen is megkapunk; ilyenkor az egybevágóság vizsgálata következik: nem lehet-e tükrözéssel vagy elforgatással ugyanolyan helyzetbe hozni valamelyik előállított formát egy másikkal.

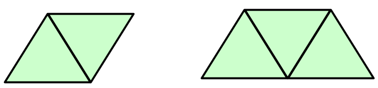
- Felvetődhet, hogy miért négyzetlapokból készítettünk kirakásokat. Lehetne más téglalapokat használni? Más négyszögeket? Háromszögeket?...
- Esetleg ki is léphetnénk a térbe: építsünk kockákból!...

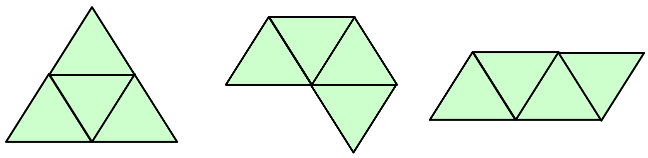
További lehetőségek a felvetett problémához illeszthető alkotásokból:

(1) 2, 3, 4, négyzetből
(2) 2, 3, 4, 5, 6, ... szabályos háromszögből
(3) 2, 3, 4, 5, 6, ... szimmetrikus háromszögből
(4) 2, 3, 4, 5, 6, ... derékszögű, nem szimmetrikus háromszögből
(5) 2, 3, 4, más négyszögből (60°-os szöggel rendelkező rombuszból, szimmetrikus, 3 egyenlő hosszú oldallal rendelkező trapézból...)
(6) Térben 2, 3, 4, ... kockával; miért több, mint ugyanennyi négyzetből
(7) Más „kiágazások" (Pl. Az 5 négyzetlapból alkotott alakzatok közül melyik lehet testhálója nyitott doboznak, a 6 négyzetlapból alkotottak közül melyik lehet testhálója kockának? Mely lapok lesznek szemköztiek, szomszédok...)

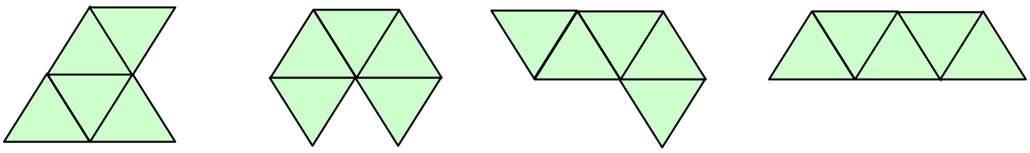
Néhány megoldás:

2, 3 szabályos háromszögből 1-1, Négyből már 3 forma rakható ki:

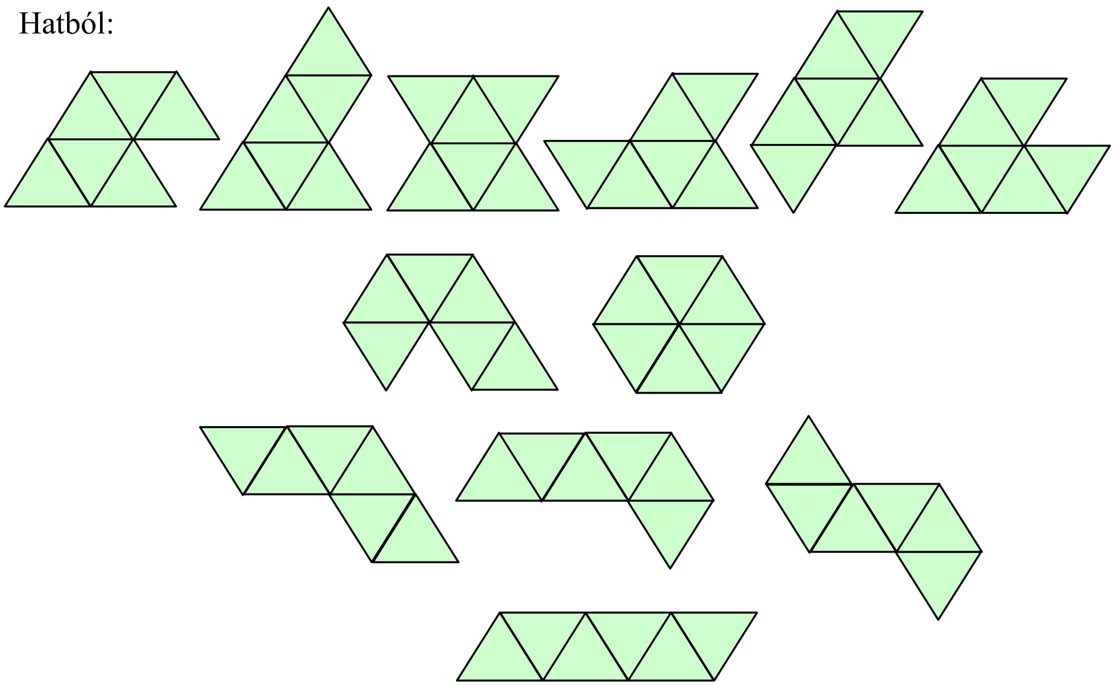




Ötből 4:

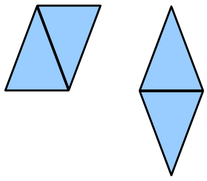


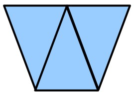
Hatból:

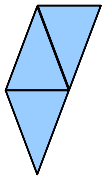


Szimmetrikus, hegyesszögű (nem szabályos) háromszögekből:

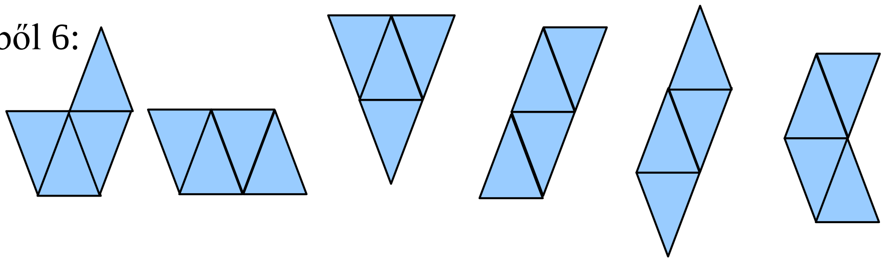
Kettőből 2, háromból 2





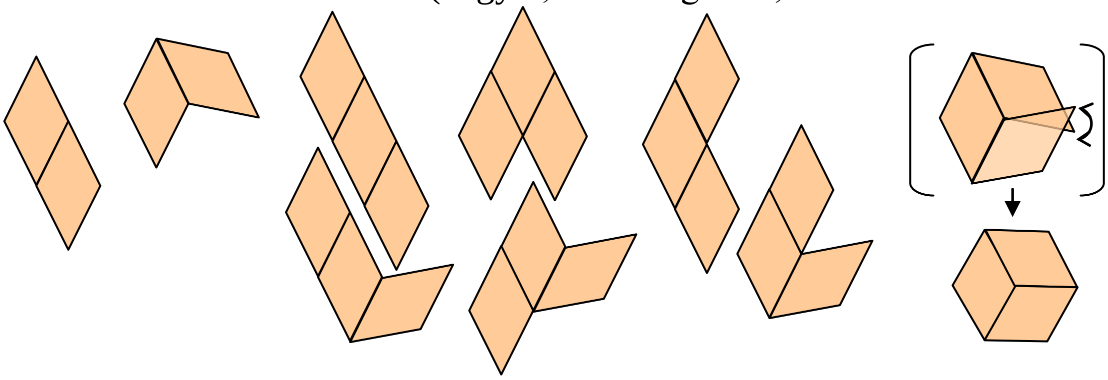


Négyből 6:



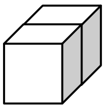
Rombuszokból:

Kettőből 2: háromból 6 (vagy 7, ha a szögei 60, és 120 fokosak:

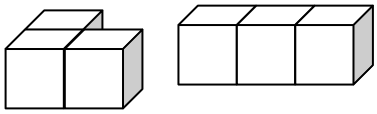


Kockákból:

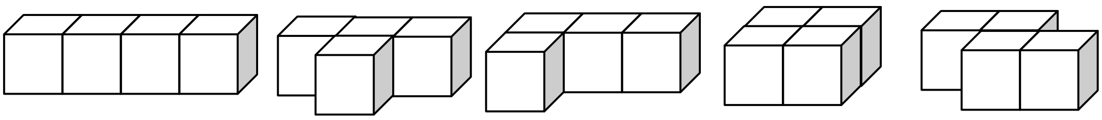
Kettőből csak 1:

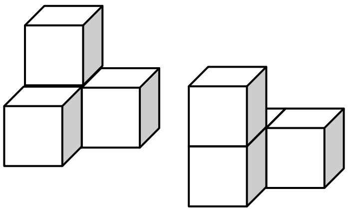


Háromból 2:

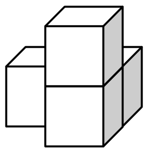


Négyből 7,





(illetve 8, ha megkülönböztetjük a térbeli mozgatással egymásba nem vihető alakzatokat, amelyek egymás síkra vonatkozó tükörképei)



A geometriai alkotások második példája legyen kis „kutatás” abban az értelemben, hogy a felvetett problémát hagyjuk nyitva több feltétel szerint! Az ilyen típusú probléma-felvetés alkalmas lehet a gyerekek kreativitásának formálására, fantáziájuk, s egyben kitartásuk fejlesztésére, ha sikerül érdeklődésüket felkelteni. (A feladat Pogáts Ferenc ötlete, ennek nyomán 6-7 éves gyerekekkel is igen szép eredményeket lehetett elérni.)

2. **Kacskaringók**

A négyzetháló egy csúcspontjából indulunk a háló vonalán, valamely irányba. Előre megadott lépésszám után jobbra fordulunk, majd ebbe az irányba ismét megadott számú lépést teszünk előre. Itt újra jobbra-át következik, s ebbe az irányba haladunk adott számú lépéssel... Így folytatjuk mindaddig, „amíg érdekes”!

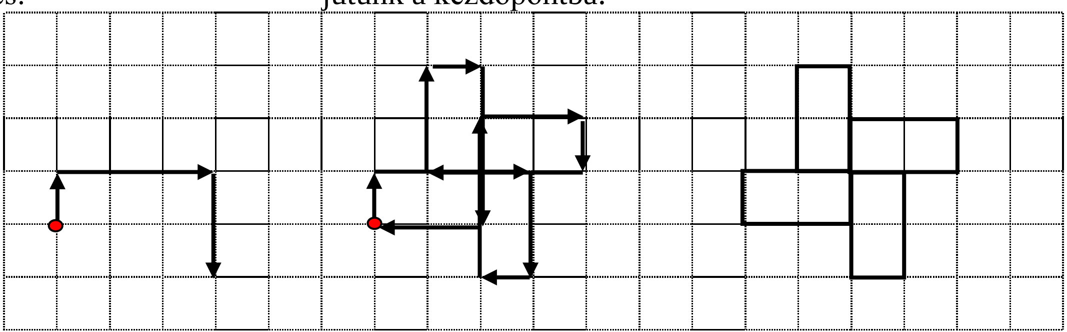
Elsős kisgyerekek téri tájékozódását, majd a síkban, füzetben való tájékozódását természetesen a saját nagytesti mozgásukkal kezdhetjük fejleszteni. Ebben az életkorban általában sok kisgyerek számára nem rögzült saját testükhöz az „irány”: a jobb, bal irányok sokáig a környezet tárgyaihoz kapcsolódnak, s nem belső képhez, érzethez. A saját testhez való rögzítésnek jó eszköze lehet, ha kezdetben nem a statikus helyzetben kijelölt irányt jelzik ezek a szavak, hanem a fordulás, kanyarodás irányát.

Ennek megfelelően érdemes a gyerekekkel sokáig a teremben, vagy udvaron végeztetni a fentihez hasonló utazásokat. Eleinte minden lépéssor után jelezhetjük, hogy jobbra-át, vagy balra-át következik, s aztán hányat lépünk az új irányba előre. Egy idő után érdemes megmaradni az egyik irányváltoztatás mellett: például minden lépéssor után következzen a jobbra-át! Később előre megadhatjuk, hogy egymás után mindig 1, majd 3, aztán 2 lépés következik, majd újra 1, 3, 2, és ismét 1, 3, 2...

A saját, nagytesti mozgással jól begyakorolt lépéssorokat ez után egyszerűbben átviszik a gyerekek a füzetbe való rajzolásra. (Persze ott is érdemes eleinte egyenként adni az utasításokat, s csak később térni rá a tömörebb jelzésekre.) Képzeljék egy kis autó volánja mögé magukat a gyerekek, és így irányítsák a ceruzájukat! Ugyanis a jobbra-át (balra át) utasítást mindig az aktuális haladási irány szerint kell érteni, s ez néha éppen ellentétes a statikus helyzet szerinti jobb, bal iránnyal, máskor pedig egészen eltér attól az értelemtől.

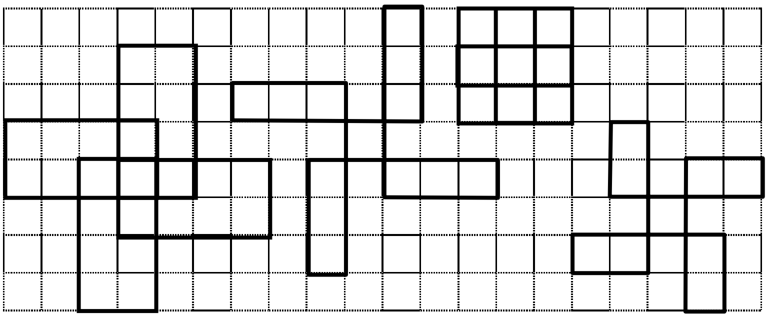
Az eleinte lépésenként diktált rajzolás után adjuk meg a három lépéssort, amit mindig a jobbra kanyarodás követ, s amit ismételhetnek többször egymás után. Legyen ismét az (1, 3, 2) az első „minta”.

Az első három lépés:	4-szer ismételve visszajutunk a kezdőpontba:	ilyen kép alakul ki:



Érdemes ez után újabb és újabb, 3 szakaszból álló mintákat adni, amelyeken begyakorolhatják a gyerekek az utasítás-követést, a jobbra kanyarodásokat.

Pl.: (2,4,5) (1,3,5) (2,2,3) (1,4,2)

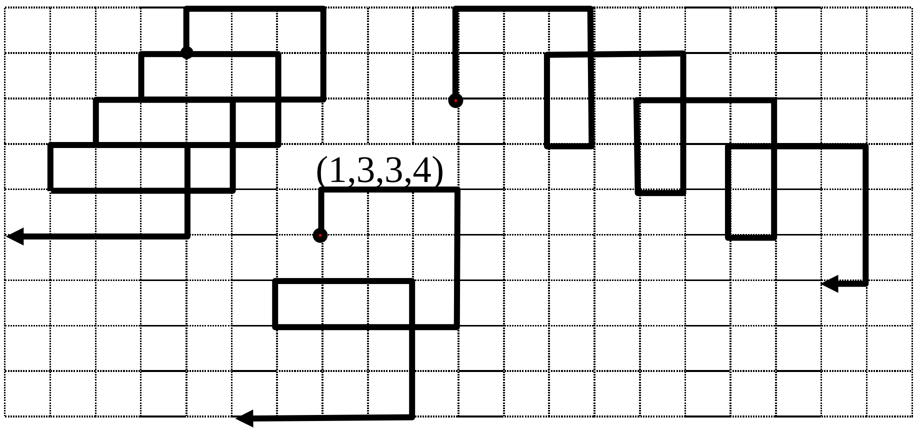


Ha a gyerekeknek nem jutna eszükbe, felvethetjük, hogy mi van, ha nem 3 lépésből áll egy ilyen sorozat-minta, hanem 4, 5, 6, 2 (1) lépésből.

A vizsgálódásnak új lendületet adhat ez a feltétel-módosítás.

4-es periódusú lépéssorozatok:

(1,3,2,4) (2,3,3,1)



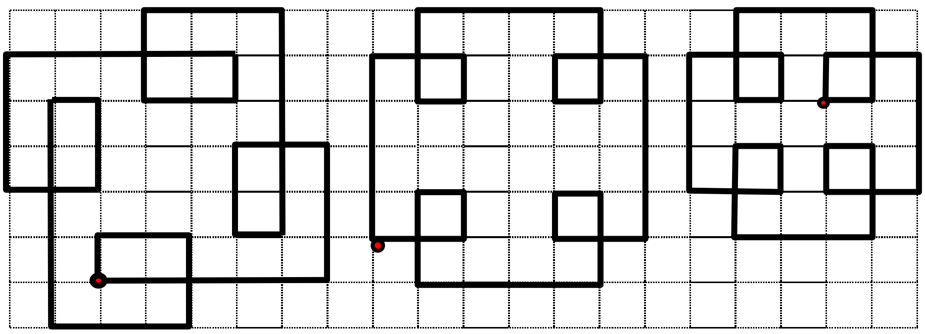
Újabb kérdések vetődhetnek fel:

Ezek sohasem jutnak vissza a kezdőpontba? Mindig „elszaladnak a végtelenbe? Mikor mennek balra, és mikor jobbra? Mindig lefelé kacskaringózik a négyes periódusú vonal? ...

Azért van ez így, mert a 4 páros szám? Mindegyik páratlan lépésű minta visszakanyarodik és minden páros lépésszámú elszalad?

Nézzünk 5-lépéses kacskaringókat!

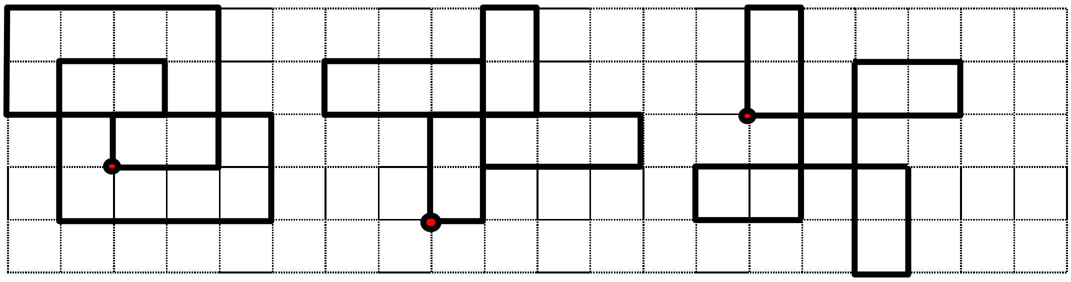
(1,2,2,3,5) (4,2,1,1,2) (1,2,3,2,1)



Ezek visszakanyarodtak. De vajon miért tükrös az utóbbi kettő, és nem tükrös az első? Az elsőt még csak könnyű belátni, hogy nem lesz tükrös. De hogy a második mitől az???

Hatos periódusú minták:

(1,3,2,4,3,2) (2,4,1,3,3,1) (2,1,4,2,1,4)



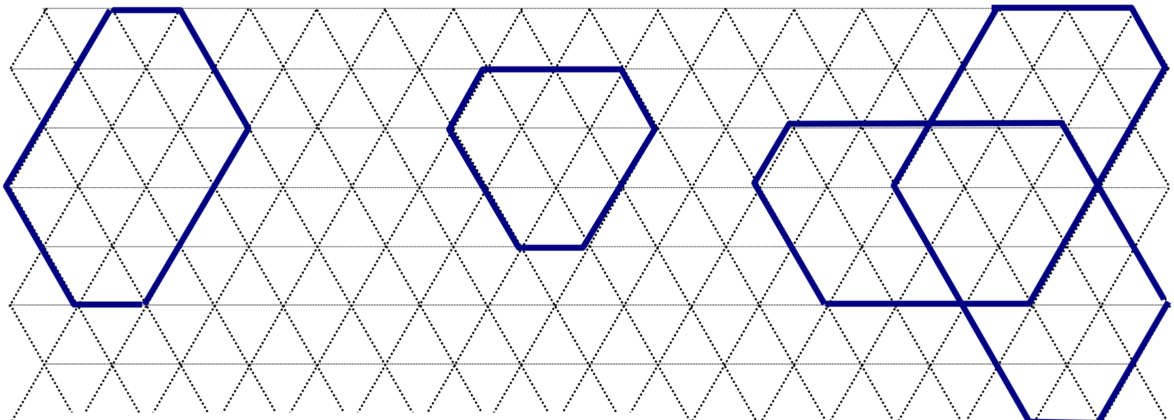
A 6 páros; mégsem „szalad el” a minta. És ráadásul – a többi záródótól eltérően – nem is mindegyik illeszthető rá egy körvonalra! Az utolsó pedig a hármas periódusúakhoz hasonlít! Na persze ez nem csoda, hiszen két egyforma hármasból áll: akár elég is lett volna hármasként megadni!

Érdekes lehet a kérdés, hogy miben változik egy-egy minta, ha nem jobbra kell mindig kanyarodni, hanem balra! Minden ilyen megfigyelés formálja a geometriai szemléletet, s – megnevezések nélkül is – fogalmakat alapoz.

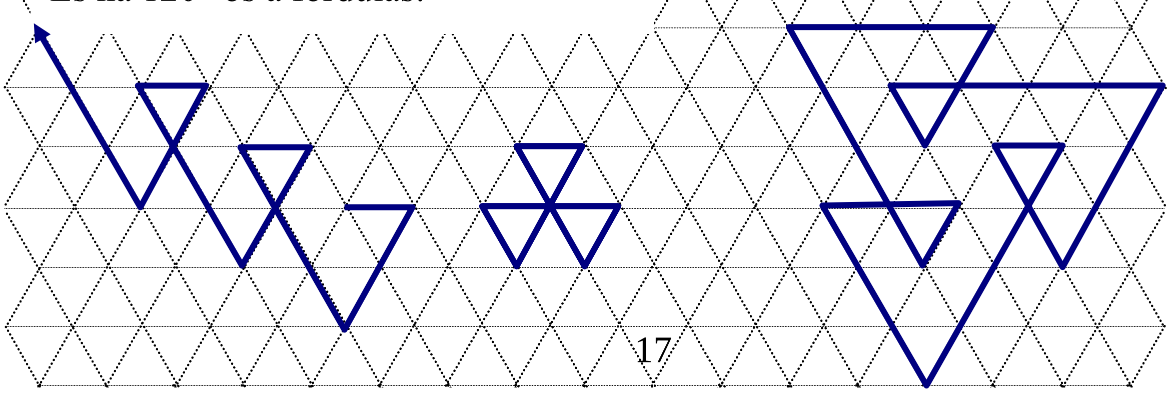
Újabb, izgalmas felvetés lehet az, hogy miképpen alakulnak a minták, ha pl. szabályos háromszög-hálón lépegetünk, és a jobbra kanyarodás 60^o-os, illetve 120^o-os jobbra fordulást jelent. Nézzünk ilyen alkotásokat is!

(1,2,3) (2,1) (2,1,4,3)

Ha a haladás irányához képest 60^o-os az elfordulás:



És ha 120^o-os a fordulás:



Az alkotások feltételeinek nagy szabadsága engedi a sokfelé elágazó kérdésfelvetést, vizsgálódást, ez teszi igen gazdaggá az ilyen kutatómunkát

A vizsgálódásunkban **objektumok** alkotásával foglalkoztunk. Objektumok voltak a **számok**, a **geometriai építmények**, **rajzok**.

Az alkotások célja azonban más is lehet. Megalkothatnak a gyerekek egy-egy **összességet**, amelyet valamilyen tulajdonság, vagy reláció fog össze. Alkothatnak készített vagy gyűjtött elemekből **sorozatot**, **táblázatot**, **rendszert**. Megalkothatnak egy-egy **összefüggést** – bizonyos összetartozó elem-párok, elem-hármasok ismeretében. Valamely probléma megértéséhez, kezeléséhez, megoldásához különféle **modelleket** hoznak létre. – Az ilyen alkotó tevékenységekben formálódik matematikai (és egyéb) fogalmai, fogalomrendszerük. De alkotnak **állításokat**, **ítéleteket**, **probléma-megoldási gondolatmeneteket**, – ami hozzájárul gondolkodás-fejlődésükhöz.